Alessandro Balsamo

Sulle prime armoniche bidimensionali

R.T. 21/2023 Luglio 2023

RAPPORTO TECNICO I.N.RI.M.

Sulle prime armoniche bidimensionali

Rapporto tecnico INRIM n° 21/2023

Alessandro Balsamo

Luglio 2023

Sommario

La scomposizione di un segnale periodico in serie di armoniche è tecnica ben nota e largamente utilizzata. Ciascun ordine d'armonica è rappresentato da due coefficienti, siano essi quelli di coseno e seno, oppure quelli di un singolo coefficiente complesso. Quando il segnale è bidimensionale, cioè è un vettore, ciascuna componente può esser separatamente scomposta in armoniche; ciò porta a quattro coefficienti anziché due per ciascun ordine d'armonica. Si esamina in questo Rapporto Tecnico soltanto l'armonica di primo ordine; essa rappresenta la fondamentale, cioè l'oscillazione sincrona con il periodo esaminato. Nel caso bidimensionale, la rappresentazione parametrica nel piano (x, y) al variare di una variabile indipendente (ad esempio il tempo in un periodo o l'angolo nel giro) è un'ellisse. Questo Rapporto Tecnico esamina nel dettaglio le caratteristiche di tale ellisse, quando questa si riduce ad una circonferenza, quando è percorsa in verso orario o antiorario, e dimostra che l'ellisse è sempre scomponibile in due circonferenze controrotanti.

Abstract

Decomposing a periodic signal into a series of harmonics is a well-known and widely used technique. Each harmonics order is represented by two coefficients, either those of cosine and sine or those of a single complex coefficient. When the signal is bidimensional, i.e. a vector, each component can be decomposed separately into a series of harmonics. This leads to four coefficients instead of two for each harmonics order. This Technical Report focusses on the harmonics of first order; this represents the fundamental of the signal, that is, the oscillation synchronous with the period of interest. The parametric representation in the plane (x, y) of a bidimensional signal as a function of an independent variable (for instance the time in a period or the angle in a revolution) is an ellipse. This Technical Report studies the details of such ellipse, when it reduces to a circle, when it progresses clockwise or anticlockwise, and proofs that the ellipse can always be decomposed in the sum of two counter-rotating circles.

Indice

Introduzione

La scomposizione di un segnale periodico in serie di armoniche, introdotta da Fourier all'inizio dell'Ottocento [1], è tecnica ben nota e largamente utilizzata. Ciascun ordine d'armonica è rappresentato da due coefficienti, siano essi quelli di coseno e seno, oppure quelli di un singolo coefficiente complesso. Quando il segnale è bidimensionale, cioè è un vettore, ciascuna componente può esser separatamente scomposta in armoniche; ciò porta a quattro coefficienti anziché due per ciascun ordine d'armonica. È possibile dare una rappresentazione parametrica del segnale nel piano (x, y) al variare della variabile indipendente, che risulta essere una curva chiusa.

Nelle applicazioni, la scomposizione in armoniche serve spesso per l'analisi di un segnale nominalmente costituito o da una semplice costante, oppure soltanto dalla fondamentale. Ad esempio, quando si studia la rotondità di un campione osservando l'oscillazione radiale (*runout*), il segnale nominale è una costante; oppure, il segnale prodotto da un oscillatore ideale è una sinusoide. Le armoniche di ordine superiore sono in tali casi studiate per quantificare la deviazione dal comportamento ideale.

L'armonica di ordine uno riveste dunque un ruolo fondamentale e peculiare. Essa è spesso di disturbo o non di diretto interesse per l'analisi desiderata, e va quindi filtrata. Ad esempio, è legata all'eccentricità fra campione e tavola che lo pone in rotazione per la misura della rotondità, ed è il segnale nominale e non la sua deviazione per l'oscillatore. Inoltre, la sua ampiezza è di solito grande o molto grande rispetto al segnale d'interesse costituito dalle sue minime deviazioni. Dunque essa, pur se infine filtrata e dimenticata, costituisce un elemento fondamentale e critico per l'intera analisi.

L'interesse specifico che ha portato a questo studio è sorto durante l'analisi della nutazione (*wobble*) di una tavola rotante di grande precisione. Mediante un sensore angolare bidimensionale, ad esempio un autocollimatore, si osserva un versore solidale con il rotore, ad esempio quello normale ad uno specchio, al variare della posizione angolare della tavola lungo un giro completo. Il versore è nominalmente allineato all'asse di rotazione ma inevitabilmente ne è leggermente disallineato. Il sensore angolare rileva le componenti del versore nel piano ortogonale all'asse di rotazione, essendo la terza componente nella direzione dell'asse sempre prossima all'unità. Ne nasce un segnale bidimensionale che può esser rappresentato in modo parametrico nel piano (x, y) al variare della posizione angolare della tavola lungo un giro; esso è una curva chiusa perché la situazione si ripete ciclicamente ad ogni giro. Nelle osservazioni effettuate, tale curva è invariabilmente risultata prevalentemente ellittica. L'esperienza maturata nelle misure di rotondità insegna che la componente ellittica va considerata perché parte effettiva della forma misuranda. Ma la rotondità è problema monodimensionale, dove il segnale è la variazione radiale (*runout*), mentre la nutazione della tavola è problema bidimensionale, dove il segnale è l'indicazione del sensore angolare. L'ellisse è prodotta nella rotondità da armonica di secondo ordine, mentre nel caso bidimensionale di primo ordine (figura di Lissajous). L'armonica di primo ordine della rotondità dev'essere filtrata mediante l'analisi armonica perché generata da accidente sperimentale, l'eccentricità fra oggetto in misura e tavola che lo pone in rotazione. Anche nel caso bidimensionale l'armonica di primo ordine, l'ellisse, è prevalentemente causata da un accidente sperimentale, il disallineamento iniziale del versore osservato; ma tale inclinazione possiede due gradi di libertà (le componenti del disallineamento) mentre l'armonica di primo ordine ne possiede quattro, i coefficienti delle componenti x e y. È dunque corretto filtrare completamente l'armonica di primo ordine, come si fa per la rotondità, oppure così facendo si trascura una parte della nutazione d'interesse?

Questo Rapporto Tecnico esamina nel dettaglio l'armonica bidimensionale di primo ordine per cercare una risposta a questo quesito. Per farlo, ne esamina le caratteristiche generali e ne sviluppa una teoria completa.

Posizione del problema

L'armonica bidimensionale di primo ordine compie un ciclo in modo sincrono con il segnale, cioè è la più bassa frequenza rappresentabile dalla serie di armoniche. Essa ha forma generale

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\cos\varphi + B\sin\varphi \\ C\cos\varphi + D\sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \mathrm{sen}\varphi \end{pmatrix} \tag{1}$$

o, in forma matriciale compatta,

$$\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{u},$$
$$\text{dove} \quad \boldsymbol{\zeta} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \ \ \boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \ \ \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \mathrm{sen}\varphi \end{pmatrix} \tag{2}$$

Vogliamo dimostrare che tale espressione sviluppa un'ellisse nel piano (x, y) al variare di $\varphi \in [0{,}2\pi]$ (rappresentazione parametrica della funzione $\boldsymbol{\zeta}(\varphi)$) e studiare sotto quali condizioni di $\boldsymbol{S}$ l'ellisse si riduce ad una circonferenza e in quali essa è percorsa in verso orario o antiorario al crescere di φ.

Infine, vogliamo dimostrare che l'ellisse si può scomporre nella somma di due circonferenze controrotanti.

Elisse

L'equazione canonica dell'ellisse è

$$\frac{\grave{x}^2}{a^2} + \frac{\grave{y}^2}{b^2} = 1 \tag{3}$$

dove $a, b \geq 0$ sono le lunghezze dei semiassi allineati agli assi cartesiani $\grave{x}, \grave{y}$. La (3) può essere posta in forma matriciale:

$$\grave{\boldsymbol{\zeta}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \grave{\boldsymbol{\zeta}} = 1$$
$$\text{dove} \quad \grave{\boldsymbol{\zeta}} = \begin{pmatrix} \grave{x} \\ \grave{y} \end{pmatrix}, \ \ \boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

L'area vale

$$\mathcal{A} = \iint_{\frac{\grave{x}^2}{a^2} + \frac{\grave{y}^2}{b^2} \leq 1} \mathrm{d}\grave{x}\,\mathrm{d}\grave{y} \tag{5}$$

Operando una trasformazione di variabili

$$\begin{pmatrix}\hat{x}\\ \hat{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dfrac{\grave{x}}{a}\\ \dfrac{\grave{y}}{b}\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{J}_{\hat{\zeta}|\grave{\zeta}} = \begin{pmatrix}\dfrac{1}{a} & 0\\ 0 & \dfrac{1}{b}\end{pmatrix}, \quad \det\left(\boldsymbol{J}_{\hat{\zeta}|\grave{\zeta}}\right) = \frac{1}{ab} \tag{6}$$

dove $\boldsymbol{J}_{\hat{\zeta}|\grave{\zeta}}$ è la matrice jacobiana della trasformazione e $\det(\cdot)$ il determinante, la (5) diventa

$$\mathcal{A} = \iint_{\hat{x}^2+\hat{y}^2 \le 1} \frac{\mathrm{d}\hat{x}\mathrm{d}\hat{x}}{\det\left(\boldsymbol{J}_{\hat{\zeta}|\grave{\zeta}}\right)} = ab \iint_{\hat{x}^2+\hat{y}^2 \le 1} \mathrm{d}\hat{x}\mathrm{d}\hat{x} = \pi ab = \pi\sqrt{\det(\boldsymbol{\Lambda})} \tag{7}$$

dove il secondo integrale rappresenta l'area del cerchio unitario, pari a π.

Operiamo ora una rotazione del sistema di riferimento ad ottenere una nuova coppia di variabili (x, y) inclinata di θ rispetto agli assi $(\grave{x}, \grave{y})$:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\zeta} = \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \boldsymbol{R}_\theta \begin{pmatrix}\grave{x}\\ \grave{y}\end{pmatrix} = \boldsymbol{R}_\theta \grave{\boldsymbol{\zeta}} \quad \Rightarrow \quad \grave{\boldsymbol{\zeta}} = \boldsymbol{R}_\theta^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\zeta} \\ &\text{dove} \quad \boldsymbol{R}_\theta = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} \end{aligned} \tag{8}$$

Nella (8) s'è fatto uso della proprietà delle matrici di rotazione[1] per cui la matrice inversa è uguale alla trasposta, $\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R} = \mathbf{I}$. Sostituendo nella (4) otteniamo

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R}_\theta \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \boldsymbol{R}_\theta^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\zeta} = 1 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{T} \boldsymbol{\zeta} = 1 \\ &\text{dove} \quad \boldsymbol{T} = \boldsymbol{R}_\theta \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \boldsymbol{R}_\theta^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{V} \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}} \\ &\qquad\quad \boldsymbol{V} = \boldsymbol{R}_\theta \end{aligned} \tag{9}$$

La matrice dei coefficienti $\boldsymbol{T}$ è simmetrica ed espressa in forma diagonalizzata con autovalori non negativi: dunque è matrice simmetrica e semidefinita[2] positiva.

Il processo logico dalla (3) alla (9), cioè la sequenza rotazione degli assi e osservazione della forma diagonalizzata, può esser percorso in senso inverso dalla (9) alla (3): la matrice dei coefficienti simmetrica e semidefinita positiva $\boldsymbol{T}$ può essere diagonalizzata, le variabili possono essere trasformate da $\grave{\boldsymbol{\zeta}}$ a $\boldsymbol{\zeta}$ per rotazione lungo gli autovettori, ad ottenere l'equazione dell'ellisse in forma canonica.

La rotazione non altera l'area; secondo la (7),

$$\begin{aligned} &\mathcal{A} = \pi\sqrt{\det(\boldsymbol{\Lambda})} = \frac{\pi}{\sqrt{\det(\boldsymbol{T})}} \\ &\text{in quanto } \det(\boldsymbol{T}) = \det(\boldsymbol{V})\det(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})\det(\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}) = \frac{1}{\det(\boldsymbol{\Lambda})} \end{aligned} \tag{10}$$

dove s'è ricorso alla proprietà delle matrici di rotazione d'avere determinanti uguali a +1.

In conclusione, perché la forma quadratica $\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{T} \boldsymbol{\zeta} = 1$ rappresenti un'ellisse è condizione necessaria e sufficiente che la matrice dei coefficienti $\boldsymbol{T}$ sia simmetrica e semidefinita positiva. La lunghezza

[1] Più in generale, delle matrici ortogonali.

[2] Gli autovalori sono gli elementi sulla diagonale di $\boldsymbol{\Lambda}^{-1}$, $1/a^2$ e $1/b^2$, dunque non negativi. Il caso di uno dei due autovalori nullo, cioè di uno dei due seminassi nullo, conduce all'ellissi degenere costituita da un segmento formato dall'altro asse. A stretto rigore, la matrice $\boldsymbol{\Lambda}$ sarebbe singolare e l'inversione $\boldsymbol{\Lambda}^{-1}$ non sarebbe possibile; assumiamo che questa sia intesa come passaggio al limite per $a \to 0$ oppure $b \to 0$.

dei semiassi è data dall'inverso della radice quadrata degli autovalori; le direzioni degli assi son date dagli autovettori; l'area è data dal prodotto dei semiassi per π, pari all'inverso della radice quadrata del determinante di $\boldsymbol{T}$ moltiplicato per π.

Circonferenza

L'ellisse si riduce ad una circonferenza quando i due semiassi hanno pari lunghezza, il raggio r. Considerando le (4) e (9), abbiamo

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} = r^2\mathbf{I} \\
&\boldsymbol{T} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{r^2}\boldsymbol{V}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{r^2}\mathbf{I} \\
&\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\boldsymbol{\zeta} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r^2}\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\zeta} = 1 \quad \Rightarrow \quad \|\boldsymbol{\zeta}\|^2 = r^2
\end{aligned}
\tag{11}
$$

dove $\mathbf{I}$ è la matrice identità.

Rappresentazione parametrica

Nella sezione precedente abbiamo indagato ellisse e circonferenza espresse con equazione cartesiana fra le variabili $\boldsymbol{\zeta} = (x \;\; y)^{\mathrm{T}}$ nella forma generale $f(\boldsymbol{\zeta}) = 0$, come in (9). Applichiamo ora quanto trovato al caso d'espressione con equazione parametrica rispetto ad una variabile indipendente, cioè nella forma generale $\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{g}(\varphi)$, come in (1) o (2).

Invertiamo l'equazione (2)[3] e prendiamo la norma quadrata di entrambi i lati:

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{u} = \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{\zeta} \\
&\|\boldsymbol{u}\|^2 = \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{\zeta}
\end{aligned}
\tag{12}
$$

dove $\boldsymbol{S}^{-\mathrm{T}}$ è la trasposta dell'inversa[4]. Osservando dalla (2) che $\boldsymbol{u}$ è unitario, $\|\boldsymbol{u}\| = 1 \;\; \forall\varphi$, la (12) diventa

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\boldsymbol{\zeta} = 1 \\
&\text{dove} \quad \boldsymbol{T} = \boldsymbol{S}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{S}^{-1}
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Il fatto che la matrice di coefficienti $\boldsymbol{T}$ sia il prodotto di una matrice per la sua trasposta indica che $\boldsymbol{T}$ è simmetrica e semidefinita positiva[5]; dunque, per quanto trovato in precedenza sulle forme quadratiche, la forma parametrica $\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{u}$ (2) esprime un'ellisse quale che sia $\boldsymbol{S}$.

Decomponiamo $\boldsymbol{S}$ ai valori singolari:

$$
\boldsymbol{S} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{S}^{-1} = \boldsymbol{W}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}
\tag{14}
$$

---

3 Nuovamente, supponiamo non singolare la $\boldsymbol{S}$. Il caso di singolarità è legata alla degenerazione dell'ellisse in un segmento; esso non sarà trattato esplicitamente ma lasciato all'approccio al limite.

4 La trasposta dell'inversa è uguale all'inversa della trasposta, cioè l'ordine di trasposizione e inversione è indifferente.

5 Data una generica matrice quadrata $\boldsymbol{A}$, si vede immediatamente per trasposizione che il prodotto $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ è simmetrico: $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$. Inoltre, pre-moltiplicando e post-moltiplicando per un generico vettore $\boldsymbol{v}$, si ottiene $\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{v})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}\|^2 \geq 0, \forall\boldsymbol{v}$. Se, per assurdo, esistesse un autovalore negativo di $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$, $\lambda < 0$, allora il suo autovettore porterebbe a $\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\lambda\boldsymbol{v} = \lambda\|\boldsymbol{v}\|^2 < 0$.

dove

$\boldsymbol{V}$, $\quad \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V} = \mathbf{I}$	è la matrice ortogonale dei vettori singolari sinistri, per colonna;
$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{diag}(s_1, s_2)$	è la matrice diagonale dei valori singolari;
$\boldsymbol{W}$, $\quad \boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W} = \mathbf{I}$	è la matrice ortogonale dei vettori singolari destri, per colonna.

Sostituendo nella (13) otteniamo

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{T} = \boldsymbol{S}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{S}^{-1} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{\Sigma}^{-2}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}} \\ &\text{dove} \qquad \boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\Sigma}^2 \end{aligned} \tag{15}$$

Confrontando con la (9), si conclude che i valori singolari di $\boldsymbol{S}$, radici quadrate degli inversi degli autovalori di $\boldsymbol{T}$, rappresentano la lunghezza dei semiassi, la cui orientazione è rappresentata dai vettori singolari destri di $\boldsymbol{S}$, colonne di $\boldsymbol{V}$ e autovettori di $\boldsymbol{T}$.

Dalle (10), (15) e (14) ricaviamo l'area:

$$\mathcal{A} = \pi\sqrt{\det(\boldsymbol{\Lambda})} = \pi|\det(\boldsymbol{\Sigma})| = \pi|\det(\boldsymbol{S})| \tag{16}$$

In conclusione, la forma parametrica (2) rappresenta un'ellisse per qualunque valore della matrice di coefficienti $\boldsymbol{S}$. L'ellisse è orientata come i vettori singolari sinistri e con lunghezze dei semiassi pari ai valori singolari. L'area è pari al valore assoluto del determinante moltiplicato per π.

Circonferenza

Dalle (11) e (15), e tenuto conto che i valori singolari sono positivi per definizione, si evince per la circonferenza

$$\boldsymbol{\Lambda} = r^2\mathbf{I} = \boldsymbol{\Sigma}^2 \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{\Sigma} = r\mathbf{I} \tag{17}$$

La (14) diviene

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}} = r\boldsymbol{V}\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}} \tag{18}$$

La matrice $\boldsymbol{V}$ dei vettori singolari sinistri di $\boldsymbol{S}$ è uguale a quella degli autovettori di $\boldsymbol{T}$ (15); nel caso della circonferenza, essa è indefinita perché l'autospazio corrispondente all'autovalore doppio r^2 è di dimensione due, e non contiene una direzione privilegiata. Della matrice $\boldsymbol{W}$ dei vettori singolari destri non abbiamo informazione provenienti dalla $\boldsymbol{T}$, perché essa scompare per elisione nella sua espressione. Ciò che sappiamo invece è che sia $\boldsymbol{V}$ sia $\boldsymbol{W}$ sono matrici ortogonali, perché questa è la forma resa dalla decomposizione ai valori singolari. In generale, il prodotto di matrici ortogonali è a sua volta ortogonale[6]; dunque $\boldsymbol{V}\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}$ è ortogonale.

In conclusione, la forma parametrica (2) con matrice di coefficienti $\boldsymbol{S}$ rappresenta una circonferenza se e solo se $\boldsymbol{S}$ è ortogonale a meno di una costante moltiplicativa[7] pari al raggio.

[6] Se $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ sono due matrici ortogonali, $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B} = \mathbf{I}$, allora $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B} = \mathbf{I}$, quindi anche $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ è ortogonale. Inoltre, la trasposta è uguale all'inversa se $\boldsymbol{A}$ è ortogonale; allora $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \mathbf{I} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ e quindi anche $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ è ortogonale.

[7] Una matrice è ortogonale se tutte le colonne (o tutte le righe) sono mutuamente ortogonali e a norma unitaria. Una matrice è ortogonale a meno di una costante se tutte le colonne (o tutte le righe) sono mutuamente ortogonali e di pari norma (non necessariamente unitaria).

Vogliamo ora dare un'espressione esplicita della matrice $\boldsymbol{S}$ nel caso della circonferenza.

Le due colonne di una matrice ortogonale 2×2 sono unitarie e mutuamente ortogonali. La generica espressione di un vettore unitario nel piano è $(\cos\theta \quad \mathrm{sen}\theta)^{\mathrm{T}}$, dove θ è l'inclinazione rispetto all'asse x. Possiamo dunque esprimere una colonna come un versore libero, e l'altra come quello ruotato di $\pi/2$. Otteniamo

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \cos\left(\theta \pm \frac{\pi}{2}\right) \\ \mathrm{sen}\theta & \mathrm{sen}\left(\theta \pm \frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \mp\mathrm{sen}\theta \\ \mathrm{sen}\theta & \pm\cos\theta \end{pmatrix} \tag{19}$$

Sostituendo nella (18) e ricordando che $\boldsymbol{V}\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}$ è ortogonale, otteniamo

$$\begin{gathered} \boldsymbol{S} = r\begin{pmatrix} \cos\theta & \mp\mathrm{sen}\theta \\ \mathrm{sen}\theta & \pm\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & \mp F \\ F & \pm E \end{pmatrix} \\ \text{dove} \quad E = r\cos\theta \\ F = r\,\mathrm{sen}\theta \end{gathered} \tag{20}$$

In conclusione, la forma parametrica (2) con matrice di coefficienti $\boldsymbol{S}$ rappresenta una circonferenza se e solo se $\boldsymbol{S}$ ha coefficienti di pari valore assoluto sulla diagonale principale e, separatamente, su quella secondaria, e se essi sono concordi su una diagonale e discordi sull'altra[8]. Il raggio è pari alla norma di ciascuna riga e di ciascuna colonna, pari alla radice quadrata del valore assoluto del determinante di $\boldsymbol{S}$.

Verso orario e antiorario delle circonferenze

L'equazione cartesiana (9) rappresenta una curva nel piano (x, y); essa è l'insieme di punti $\boldsymbol{\zeta}$ soluzioni dell'equazione senza un ordine specifico. Al contrario, l'equazione parametrica (2) rappresenta un punto che procede nel piano (x, y) al crescere del parametro φ; nel caso in specie di figura chiusa (ellisse), si distingue un verso di percorrenza orario o antiorario. Ci interessa studiare le proprietà della matrice dei coefficienti $\boldsymbol{S}$ che determinano il verso di percorrenza.

Derivando la (2) rispetto a φ otteniamo un vettore $\boldsymbol{v}$ ortogonale all'ellisse in quel punto; se φ rappresentasse un tempo, la (2) sarebbe un moto orario e $\boldsymbol{v}$ sarebbe il vettore velocità.

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathbf{d}\boldsymbol{\zeta}}{\mathbf{d}\varphi} = \boldsymbol{S}\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{u}}{\mathbf{d}\varphi} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\mathrm{sen}\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} \tag{21}$$

I vettori $\boldsymbol{\zeta}$ e $\boldsymbol{v}$ giacciono nel piano (x, y) e sono bidimensionali; consideriamone ora le estensioni tridimensionali, $\boldsymbol{\zeta}_3$ e $\boldsymbol{v}_3$, ottenute aggiungendo la direzione z ortogonale al piano (x, y) in modo da formare una terna destrorsa, cioè con z positivo verso l'alto. La loro compente lungo z è nulla, cioè

$$\boldsymbol{\zeta}_3 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\zeta} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{22}$$

I vettori $\boldsymbol{\zeta}$ e $\boldsymbol{\zeta}_3$ puntano verso l'esterno dell'ellisse mentre $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{v}_3$ nella direzione di percorrenza. Il verso orario o antiorario di percorrenza dell'ellisse sarà dunque indicato dal verso del prodotto

---

[8] I coefficienti su una diagonale potrebbero esser nulli, dunque né concordi né discordi. In tal caso fa fede l'altra diagonale, che nulla non può essere se non nel caso degenere di circonferenza nulla collassata in un solo punto.

vettoriale $\boldsymbol{\zeta}_3 \times \boldsymbol{v}_3$, lungo $\boldsymbol{z}$ se antiorario e lungo $-\boldsymbol{z}$ se antiorario. Ricordando le (2) e (21), otteniamo

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\zeta}_3 \times \boldsymbol{v}_3) = \det[(\boldsymbol{\zeta} \quad \boldsymbol{v})] = \\
&= \det\left[\left(\boldsymbol{S}\begin{pmatrix}\cos\varphi \\ \mathrm{sen}\varphi\end{pmatrix} \quad \boldsymbol{S}\begin{pmatrix}-\mathrm{sen}\varphi \\ \cos\varphi\end{pmatrix}\right)\right] = \\
&= \det\left[\boldsymbol{S}\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\mathrm{sen}\varphi \\ \mathrm{sen}\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\right] = \\
&= \det(\boldsymbol{S})\det\left[\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\mathrm{sen}\varphi \\ \mathrm{sen}\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\right] = \\
&= \det(\boldsymbol{S})
\end{aligned}
\tag{23}
$$

dove la prima uguaglianza indica la sola componente in z del prodotto vettoriale.

In conclusione, il verso di percorrenza dell'ellisse dipende dal segno del determinante della matrice dei coefficienti: antiorario se positivo, orario se negativo[9]. Nel caso della circonferenza, ricordando la forma esplicita (20), il verso è antiorario se sono concordi i coefficienti sulla diagonale principale e/o discordi sulla secondaria, orario se discordi sulla principale e/o concordi sulla secondaria[10].

Scomposizione in circonferenze controrotanti

Date due generiche variabili (v, w), possiamo sempre operare la trasformazione diretta e inversa nelle variabili (t, u)

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix}v \\ w\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t+u \\ t-u\end{pmatrix} \\
&\begin{pmatrix}t \\ u\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}v+w \\ v-w\end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Applichiamo la (24) alla matrice dei coefficienti di (2) separatamente alle coppie di coefficienti (A, D) e (C, B), che si trasformano rispettivamente in (E, G) e (H, F):

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix}A & B \\ C & D\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}E+G & H-F \\ H+F & E-G\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}E & -F \\ F & E\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}G & H \\ H & -G\end{pmatrix} = \boldsymbol{S}_{\mathrm{a}} + \boldsymbol{S}_{\mathrm{o}} \\
&\text{dove} \quad \boldsymbol{S}_{\mathrm{a}} = \begin{pmatrix}E & -F \\ F & E\end{pmatrix} \\
&\qquad\quad \boldsymbol{S}_{\mathrm{o}} = \begin{pmatrix}G & H \\ H & -G\end{pmatrix} \\
&\qquad \begin{pmatrix}E \\ F \\ G \\ H\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}A+D \\ C-B \\ A-D \\ C+B\end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Sostituendo nella (2) abbiamo

$$
\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{S}_{\mathrm{a}} + \boldsymbol{S}_{\mathrm{o}})\boldsymbol{u} = \boldsymbol{S}_{\mathrm{a}}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{S}_{\mathrm{o}}\boldsymbol{u} \tag{26}
$$

Osservando la forma delle matrici $\boldsymbol{S}_{\mathrm{a}}$ ed $\boldsymbol{S}_{\mathrm{o}}$ nella (25), rileviamo che esse danno origine nella (26) a due circonferenze percorse in senso rispettivamente antiorario ($\boldsymbol{S}_{\mathrm{a}}$) ed orario ($\boldsymbol{S}_{\mathrm{o}}$). Infatti

[9] È interessante il caso di ellisse degenere con uno dei semiassi nullo. In questo caso l'ellisse si riduce ad un segmento pari all'altro asse, il determinante è nullo, e il verso di percorrenza risulta indefinito. Infatti, il moto del punto diventa oscillatorio lungo il segmento, che non può esser considerato né orario né antiorario.

[10] Si utilizza la congiunzione "e/o" anziché "e" per ricomprendere il caso di una delle due diagonali nulle.

entrambe sono ortogonali a meno di una costante, e i loro determinanti sono uno positivo e uno negativo:

$$\begin{aligned} &\det(\boldsymbol{S}_\mathrm{a}) = E^2 + F^2 \geq 0, \qquad \boldsymbol{S}_\mathrm{a}^\mathrm{T}\boldsymbol{S}_\mathrm{a} = \begin{pmatrix} E^2+F^2 & 0 \\ 0 & E^2+F^2 \end{pmatrix} = \det(\boldsymbol{S}_\mathrm{a})\mathbf{I} \\ &\det(\boldsymbol{S}_\mathrm{o}) = -G^2 - H^2 \leq 0, \quad \boldsymbol{S}_\mathrm{o}^\mathrm{T}\boldsymbol{S}_\mathrm{o} = \begin{pmatrix} -G^2-H^2 & 0 \\ 0 & -G^2-H^2 \end{pmatrix} = \det(\boldsymbol{S}_\mathrm{o})\mathbf{I} \end{aligned} \tag{27}$$

Notiamo dalle (27) e (25) che

$$\begin{aligned} &\det(\boldsymbol{S}_\mathrm{a}) = E^2 + F^2 = \frac{1}{4}[(A+D)^2 + (C-B)^2] \\ &\det(\boldsymbol{S}_\mathrm{o}) = -G^2 - H^2 = -\frac{1}{4}[(A-D)^2 + (C+B)^2] \end{aligned} \tag{28}$$

da cui

$$\begin{aligned} \det(\boldsymbol{S}_\mathrm{a}) + \det(\boldsymbol{S}_\mathrm{o}) &= \frac{1}{4}[(A+D)^2 - (A-D)^2 + (C-B)^2 - (C+B)^2] = \\ &= \frac{1}{4}(4AD - 4BC) = AD - BC = \det(\boldsymbol{S}) \end{aligned} \tag{29}$$

La somma (algebrica) dei determinanti delle due matrici addende è pari al determinante della matrice somma, proprietà non generale. Interpretando la (29) in termini di aree, e ricordando i segni dei determinanti delle circonferenze antioraria e oraria, otteniamo dalla (16)

$$\mathcal{A} = \pi|\det(\boldsymbol{S})| = \pi|\det(\boldsymbol{S}_\mathrm{a}) + \det(\boldsymbol{S}_\mathrm{o})| = \big|\pi|\det(\boldsymbol{S}_\mathrm{a})| - \pi|\det(\boldsymbol{S}_\mathrm{o})|\big| = |\mathcal{A}_\mathrm{a} - \mathcal{A}_\mathrm{o}| \tag{30}$$

Dunque, l'area dell'ellisse è pari alla differenza (in valore assoluto) delle aree dei due cerchi controrotanti.

Gradi di libertà e punto iniziale

Nella decomposizione ai valori singolari della matrice di coefficienti, $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{V\Sigma W}^\mathrm{T}$ (14), notiamo che l'orientazione dell'ellisse è determinata dalla $\boldsymbol{V}$ (assi lungo le sue colonne, vettori singolari sinistri), la lunghezza dei semiassi dalla $\boldsymbol{\Sigma}$ (valori singolari lungo la diagonale principale), mentre la $\boldsymbol{W}$ (vettori singolari destri) non ha alcun ruolo. Ci chiediamo se e quale influenza abbia la $\boldsymbol{W}$.

Riprendendo la forma parametrica (2), possiamo scrivere

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{Su} = \boldsymbol{V\Sigma W}^\mathrm{T}\boldsymbol{R}^\mathrm{T}\boldsymbol{Ru} = \boldsymbol{V\Sigma}\widehat{\boldsymbol{W}}^\mathrm{T}\widehat{\boldsymbol{u}} \\ &\text{dove} \quad \widehat{\boldsymbol{W}} = \boldsymbol{RW} \\ &\qquad \widehat{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{Ru} = \begin{pmatrix} \cos\varphi_0 & -\sin\varphi_0 \\ \sin\varphi_0 & \cos\varphi_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \mathrm{sen}\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi+\varphi_0) \\ \mathrm{sen}(\varphi+\varphi_0) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{31}$$

dove $\boldsymbol{R}$ è la matrice di rotazione di un angolo φ_0. $\widehat{\boldsymbol{W}}$, prodotto di due matrici ortogonali, è pure ortogonale, dunque espressione di $\boldsymbol{\zeta}$ nella (31) è una valida scomposizione ai valori singolari, riferita alla nuova variabile $\widehat{\boldsymbol{u}}$. Quest'ultima si ottiene dalla $\boldsymbol{u}$ mediante un semplice cambio di zero delle variabile corrente φ. Dunque, al variare dei vettori singolari destri $\boldsymbol{W}$ l'espressione parametrica (2) rappresenta la medesima ellisse ma con punto iniziale differente. Più precisamente, l'espressione (2) per $\varphi = 0$ vale

$$\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{r}_{W,1} \tag{32}$$

dove $\boldsymbol{r}_{W,1}$ è la prima riga della $\boldsymbol{W}$. Invertendo la (32) s'ottiene

$$\boldsymbol{r}_{W,1} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\zeta} \tag{33}$$

cioè la prima riga[11] della $\boldsymbol{W}$ è il versore che indica il punto iniziale dell'ellissi nel sistema di riferimento allineato agli assi $(\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\zeta})$ con cambio di scala secondo le lunghezze dei seminassi ad ottenere una circonferenza $(\boldsymbol{\Sigma}^{-1})$.

Quest'interpretazione della matrice dei valori singolari destri $\boldsymbol{W}$ spiega un'apparente perdita di un grado di libertà. In generale, un'ellisse con centro nell'origine possiede tre gradi di libertà, ad esempio la lunghezza dei due semiassi e la loro inclinazione, mentre la matrice $\boldsymbol{S}$ che la rappresenta ne possiede quattro, quanti i suoi coefficienti indipendenti. Il grado di libertà mancante è la fase iniziale, cioè dove si trova sull'ellisse il punto ottenuto per $\varphi = 0$. Ciò è irrilevante per la geometria dell'ellisse, mentre rileva quando il parametro sia legato alla fisica di un dispositivo, ad esempio una tavola rotante.

Medesima considerazione si applica per la circonferenza: una centrata nell'origine possiede un grado di libertà, il raggio, mentre la matrice ortogonale a meno di una costante che la rappresenta ne possiede due, i coefficienti indipendenti E ed F. La fase inziale o "primo punto" sulla circonferenza assorbe il secondo grado di libertà.

Riassunto e conclusioni

La forma parametrica (1) o (2)

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A\cos\varphi + B\sin\varphi\\C\cos\varphi + D\sin\varphi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A & B\\C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\varphi\\\mathrm{sen}\varphi\end{pmatrix} = \boldsymbol{S}\begin{pmatrix}\cos\varphi\\\mathrm{sen}\varphi\end{pmatrix}$$

rappresenta un'ellisse nel piano (x, y) al variare del parametro angolare φ, quale che sia la matrice dei coefficienti $\boldsymbol{S}$. I suoi semiassi hanno lunghezza a, b pari ai valori singolari di $\boldsymbol{S}$ e sono diretti come i vettori singolari sinistri; la sua area è pari a $\pi ab = \pi\,|\det(\boldsymbol{S})|$; il verso di percorrenza per φ crescente è dettato dal segno di $\det(\boldsymbol{S})$, antiorario se positivo, orario se negativo.

L'ellisse si riduce ad una circonferenza quando i due semiassi hanno pari lunghezza, $a = b = r$. Ciò accade quando la matrice $\boldsymbol{S}$ è ortogonale a meno di una costante, pari al raggio e pari alla radice quadrata del valore assoluto del determinante, $\sqrt{|\det(\boldsymbol{S})|}$. $\boldsymbol{S}$ ha i coefficienti sulla diagonale principale fra loro uguali in valore assoluto, come pure fra loro quelli sulla diagonale secondaria. Le coppie di coefficienti su una medesima diagonale sono una discorde e l'altra concorde: concorde la principale e/o discorde la secondaria se la circonferenza procede in senso antiorario, e discorde la principale e/o concorde la secondaria se orario.

L'ellisse si può scomporre nella somma di due circonferenze controrotanti, vedi dal (25). La differenza delle aree dei due cerchi (in valore assoluto) è pari all'area dell'ellisse.

Un grado di libertà apparentemente si perde nell'esprimere con quattro coefficienti indipendenti nella $\boldsymbol{S}$ un'ellisse centrata nell'origine, che ne possiede solo tre, oppure nell'esprimere con due

[11] Data la forma di una generica matrice ortogonale 2×2 (19), la prima riga è uguale alla prima colonna, vettore singolare destro, eventualmente a meno di un cambio di segno della variabile corrente φ.

coefficienti indipendenti una circonferenza centrata nell'origine, che ne possiede uno soltanto. Il grado di libertà non si perde ma rappresenta la fase inziale della variabile corrente, cioè la collocazione sull'ellisse del punto ottenuto per $\varphi = 0$. Questa informazione non è presente nella descrizione geometrica analitica dell'ellisse.

In definitiva, si ha controllo pieno dell'ellisse mediante la scomposizione ai valori singolari della matrice dei coefficienti $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{V\Sigma W}^{\mathrm{T}}$. La matrice dei vettori singolari sinistri $\boldsymbol{V}$ determina l'orientazione degli assi; quella dei valori singolari $\boldsymbol{\Sigma}$ la dimensione dell'ellisse; quella dei vettori singolari destri $\boldsymbol{W}$ la collocazione del punto per $\varphi = 0$. La matrice $\boldsymbol{\Sigma}$ è l'unica non adimensionale delle tre, dimensionata come la variabile rappresentata $\boldsymbol{\zeta} = (x, y)^{\mathrm{T}}$.

Alla luce di quanto sopra, possiamo risolvere il quesito formulato nell'introduzione. L'ellisse ottenuta dalla rappresentazione parametrica del segnale di nutazione si può scomporre in due circonferenze controrotanti. Quella nello stesso verso della rotazione della tavola potrebbe esser annullata da un opportuno, sebbene impratico, allineamento fine della posizione iniziale del versore osservato (lo specchio); è dunque dettata da accidente sperimentale. Viceversa quella nel verso opposto non risente della posizione iniziale del versore né può essere annullata per allineamento fine; è dunque parte della nutazione. Pertanto, nell'analisi armonica si dovrà scomporre la prima armonica bidimensionale in due circonferenze controrotanti, scartare quella nello stesso senso di rotazione della tavola rotante e conservare l'altra.

Riferimenti

[1] Jean-Baptiste-Joseph Fourier, 1808, *Mémoire sur la propagation de la Chaleur dans les corps solides*, Nouveau Bulletin des Sciences par la Société Philomathique. Paris, tome 1, no. 6, pp. 112-116.